Różne sposoby rozwiązywania zadań tekstowych

Zadanie 1

Kupiono zeszyty po 7 zł i ołówki po 2 zł. Za osiem artykułów zapłacono 31 zł. Ile kupiono zeszytów, a ile ołówków?

Metoda prób i błędów

„pół na pół”

Gdyby kupiono 4 zeszyty i 4 ołówki, to zapłacono by
$4 \cdot 7 + 4 \cdot 2 = 36$ – o 5 zł za dużo.

Ponieważ zeszyt jest droższy o 5 zł, zatem liczbę zakupionych zeszytów trzeba zmniejszyć o 1 sztukę, a liczbę ołówków zwiększyć o 1.
$3 \cdot 7 + 5 \cdot 2 = 31$
Trzeba jeszcze uzasadnić, że jest to jedyne rozwiązanie tego zadania.

„za dużo”

Gdyby kupiono 8 zeszytów i 0 ołówków, to zapłacono by
$8 \cdot 7 = 56$ – o 25 zł za dużo.
Gdyby kupiono 7 zeszytów i 1 ołówek, to zapłacono by
$7 \cdot 7 + 1 \cdot 2 = 51$ – o 20 zł za dużo
Przy zmniejszaniu liczby zeszytów o 1 i zwiększaniu liczby ołówków o 1, kwota za zakupy zmniejsza się o 5 zł. Zatem należy zmniejszyć jeszcze o 4 liczbę zeszytów.
$7 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 31$

„za mało”

Gdyby kupiono 8 ołówków i 0 zeszytów, to zapłacono by
$8 \cdot 2 = 16$ – o 15 zł za mało
Gdyby kupiono 7 ołówków i 1 zeszyt, to zapłacono by
$7 \cdot 2 + 1 \cdot 7 = 21$ – o 10 zł za mało.
Przy zmniejszaniu liczby ołówków o 1 i zwiększaniu liczby zeszytów o 1, kwota za zakupy zwiększa się o 5 zł, zatem trzeba jeszcze zmniejszyć liczbę ołówków o 2, a liczbę zeszytów zwiększyć o 2.
$5 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 10 + 21 = 31$

Metoda arytmetyczna – analiza własności liczb

$$7 \cdot \underbrace{\bigcirc}_{} + 2 \cdot \square = 31$$

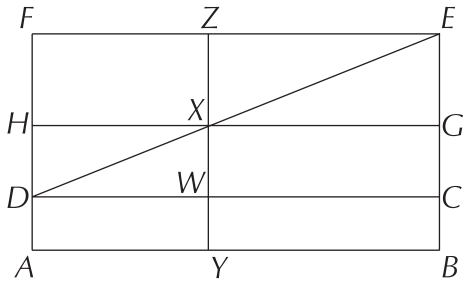
wielokrotność $7 < 31$

zatem sprawdzamy:
$7 \cdot 1 + 2 \cdot 7 = 21$ – za mało
$7 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 26$ – za mało
$7 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 31$ – dobry wynik
$7 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 36$ – za dużo

Za pomocą równania

Rozwiązanie algebraiczne można przedstawić za pomocą równania:
$7z + 2 \cdot (8 - z) = 31$, gdzie z oznacza liczbę zeszytów,
lub
$7\,(8 - o) + 2 \cdot o = 31$, gdzie o oznacza liczbę ołówków,

Za pomocą rysunku



$AB = 8$
$AD = 2$
$AF = 7$
$AH = \frac{31}{8}$
$AY = 3$
$YB = 5$

Pole prostokąta *ABCD* ilustruje, ile kosztuje 8 ołówków po 2 zł (możliwie najtańsze zakupy wynikające z treści zadania).

Pole prostokąta *ABEF* pokazuje, ile kosztuje 8 zeszytów po 7 zł (możliwie najdroższe zakupy). Pole prostokąta *ABGH* wynosi 31 i ilustruje kwotę zapłaconą za zakupy.

$\frac{31}{8}$ zł to średnia cena jednej zakupionej rzeczy. Należy pole prostokąta *ABGH* zrównoważyć polem dwóch innych prostokątów, jednym o boku 2, drugim o boku 7. Zatem prowadzimy przekątną *DE*, która odcinek *HG* przecina w punkcie *X*. Prowadzimy przez punkt *X* odcinek prostopadły do odcinka *AB*, który przecina go w punkcie *Y*, a odcinek *EF* w punkcie *Z*.

Długość odcinka *AY* wskazuje, ile kupiono zeszytów, a *YB* ile ołówków, zatem pole prostokąta *AYZF* ilustruje kwotę zapłaconą za zeszyty, a *YBCW* za ołówki. Suma pól tych prostokątów wynosi 31 i jest taka sama jak pole prostokąta *ABGH*, ponieważ:

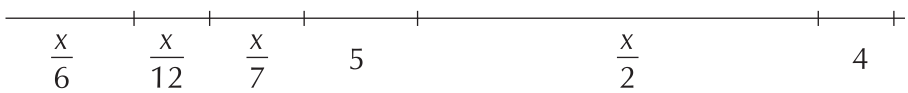
$P_{trDEF} = P_{trDCE}$
$P_{trDWX} = P_{trDXH} \longrightarrow P_{prXZFH} = P_{prWCGX} \longrightarrow P_{prABGH} = P_{prAYZF} + P_{prYBCW}$
$P_{trXZE} = P_{trGXE}$

Zadanie 2

Pod tym nagrobkiem spoczywa Diofantos, a dzięki przedziwnej sztuce zmarłego wiek jego zdradzi ci ten głaz: chłopcem przez szóstą część życia pozostać Bóg mu pozwolił, lica pokwitły mu zaś kiedy dwunasta część znów życia mu minęła, a gdy przebył część siódmą młodą małżonkę w dom dobry Bóg mu wprowadził, która, gdy pięć lat minęło małego powiła mu synka. Ale okrutny los chciał, że kiedy syn ledwie wiek ojca w połowie osiągnął, ponury zabrał go Hades. Kojąc ogromny swój ból, szukał Diofant wśród liczb przez 4 lata pociechy, aż rozstał się z życiem.

Rozwiązanie algebraiczne

x – długość życia Diofantosa



$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

Rozwiązanie arytmetyczne

Wiek Diofantosa musi być liczbą większą od 9 i taką, która dzieli się przez 2, 6, 12 i 7 , zatem musi to być wielokrotność tych liczb. Wypiszmy kilka wielokrotności tych liczb: 84, 168, 252,.... Sprawdzamy warunki zadania dla pierwszych dwóch liczb:

$84 : 6 + 84 : 12 + 84 : 7 + 5 + 84 : 2 + 4 = 84$

$168 : 6 + 168 : 12 + 168 : 7 + 5 + 168 : 2 + 4 = 168$?

Po sprawdzeniu stwierdzamy, że tylko pierwsza wielokrotność jest rozwiązaniem tego zadania.

Pokażmy jeszcze zadanie, dla którego rozwiązanie algebraiczne jest skomplikowanym równaniem, natomiast graf i metoda działań odwrotnych powoduje uproszczenie rozwiązania.

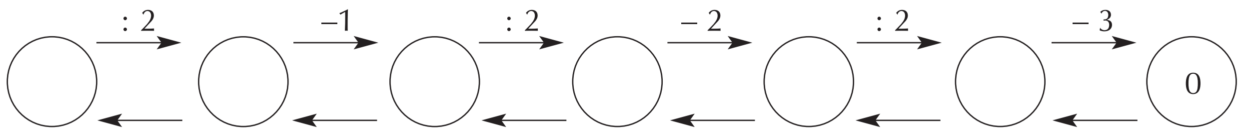
Zadanie 3

Czeska księżniczka Libusza obiecała oddać swą rękę temu z trzech ubiegających się o nią rycerzy, który pierwszy rozwiąże następujące zadanie:

Ile śliwek mieści koszyk, z którego pierwszemu rycerzowi odda połowę i jeszcze jedną śliwkę, drugiemu połowę reszty i jeszcze dwie śliwki, trzeciemu połowę pozostałych i jeszcze trzy śliwki, po czym koszyk będzie pusty?

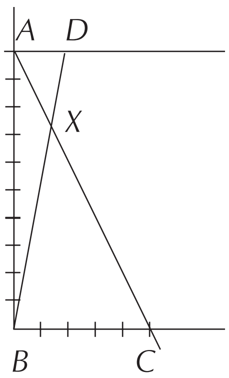
Za pomocą grafu

Sytuację opisaną w zadaniu przedstawia graf. Uzupełnij go.



Zadanie 4

Miasta A i B odległe są od siebie o 100 km. Z miasta A wyrusza rowerzysta jadący ze średnią prędkością 20 km/h w kierunku miasta B. O tej samej godzinie z miasta B do miasta A wyruszył samochód jadący ze średnią prędkością 60 km/h . Po jakim czasie od momentu rozpoczęcia jazdy i w jakiej odległości od poszczególnych miast się spotkają?



Za pomocą wykresu

Na rysunku odcinek AB ma długość 10 jednostek i oznacza odległość między miastami. Odcinek BC ma długość 5 jednostek i oznacza czas jazdy potrzebny na pokonanie tej drogi przez rowerzystę. Odcinek AD ilustruje czas jazdy potrzebny na pokonanie drogi przez samochód. Poprowadźmy odcinki AC i BD przecinające się w punkcie X, którego pierwsza współrzędna oznacza, po jakim czasie od wyruszenia spotka się rowerzysta z samochodem, a druga współrzędna wskazuje na odległość dzielącą ich od miast.

Metodą prób i błędów

Załóżmy, że spotkają się po 1 h jazdy. Wtedy obaj przejechali łącznie 80 km, czyli dzieli ich 20 km. Zatem sprawdźmy, co będzie, gdy pojadą jeszcze przez 15 min. Przejadą wówczas drogę długości $1\frac{1}{4} \cdot 20 + 1\frac{1}{4} \cdot 60 = 100$, czyli całą odległość między A i B.

Przedstawiliśmy kilka zadań rozwiązanych różnymi sposobami. Nie wyczerpuje to tematu, ale daje obraz różnych możliwości rozwiązywania tych samych zadań. Widać, że oprócz rozwiązań algebraicznych, które dominują w polskiej szkole, jest wiele innych metod rozwiązań kształtujących u uczniów różnorodne umiejętności. Trzeba się tylko do nich przekonać, a uczniowie sami będą poszukiwać innych sposobów.